wildan-wicaksono.github.io

Solusi OSK SMA 2026

Bidang Matematika

Wildan Bagus Wicaksono

2026

Bagian I – Soal

1. Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal pilihan ganda. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **tepat satu** dari lima pilihan: (A), (B), (C), (D), atau (E). Soal yang dijawab benar bernilai 1 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

. . . .

1 Diketahui x, y, dan z merupakan bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$x - y = 1, \quad y - z = 2, \quad xyz = 777.$$

Nilai dari

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

adalah . . . .

2 Adi, Budi, dan Cici melakukan permainan melempar koin, dengan Adi mendapat giliran pertama, dilanjutkan dengan Budi, lalu Cici. Pemain pertama yang mendapatkan gambar dinyatakan menang. Jika ketiga pemain mendapat angka, permainan diulang dengan urutan yang sama. Jika peluang Adi menang adalah $\frac{a}{n}$, peluang Budi menang adalah $\frac{b}{n}$, dan peluang Cici menang adalah $\frac{c}{n}$, dengan a, b, c, n adalah bilangan asli serta $\text{FPB}(a, b, c, n) = 1$, nilai dari $c + n$ adalah . . . .

3 Polinomial $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ habis dibagi $Q(x) = x^2 + \frac{1}{40}$. Nilai dari $\frac{a}{c}$ adalah . . . .

4 Diketahui terdapat segitiga siku-siku dengan luas 45 dan jari-jari lingkaran luarnya adalah 8. Jika jari-jari lingkaran dalamnya dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{m} + n$ dengan m dan n adalah bilangan bulat, nilai dari $m + n$ adalah . . . .

5 Banyaknya bilangan asli dari $456, 457, 458, \cdots, 2026$ yang digit-digitnya berbeda dan jika dibaca dari kiri ke kanan, digit-digitnya berada dalam urutan menaik adalah . . . .

6 Diketahui $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. Untuk setiap bilangan asli $n \geqslant 3$, a_n merupakan sisa pembagian $a_{n-2} + a_{n-1}$ oleh 3. Nilai dari $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2026}$ adalah . . . .

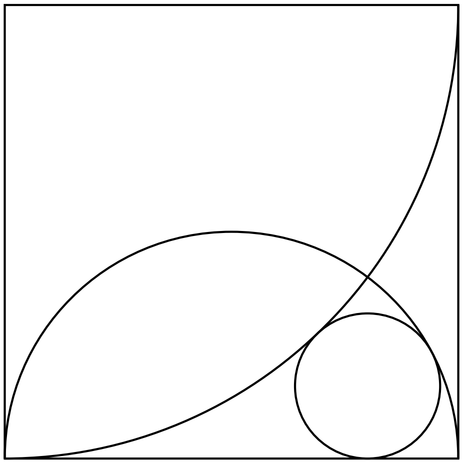
7 Diketahui p, q, r merupakan bilangan prima yang memenuhi

$$p + q + r = 26 \quad \text{dan} \quad pq + qr + rp = 191.$$

Nilai dari pqr adalah . . . .

8 Diketahui p dan q bilangan prima sehingga $f(x) = x^2 + px + q^2$ memiliki akar-akar bilangan bulat. Nilai dari $p + 2q$ adalah . . . .

9 Pada gambar di bawah, lingkaran kecil menyinggung seperempat lingkaran di luar, menyinggung setengah lingkaran di dalam, dan menyinggung satu sisi persegi. Jika panjang sisi persegi adalah 300, panjang jari-jari lingkaran kecil tersebut adalah . . . .



10 Adi mempunyai koper dengan kunci yang merupakan sebuah barisan 8 angka, dengan setiap angka bernilai 1, 2, 3, 4, atau 5. Ia ingin kunci tersebut memuat tepat satu angka 1 dan empat angka 2. Banyaknya kunci yang dapat dia buat adalah . . .

2. Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 4 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

....

11 Misalkan x bilangan rasional terbesar yang kurang dari 100 dan memenuhi persamaan

$$x^2 + \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x^2 \right\rfloor + x + \frac{31}{100}.$$

Jika x dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, nilai dari $a + b$ adalah . . . .

12 Terdapat papan berukuran 2×3 (2 baris dan 3 kolom). Setiap petak diberi warna hitam atau putih. Pada setiap kolom terdapat setidaknya satu petak hitam dan pada setiap baris terdapat setidaknya satu petak putih. Setiap petak putih diberi label berupa salah satu dari bilangan 3, 4, 5, 6, 7, 8. Setiap baris memiliki jumlah bilangan 8. Banyak papan berbeda yang memenuhi adalah . . . .

13 Misalkan nilai minimum dari

$$x + 50y + \frac{625}{xy^2}$$

untuk x dan y bilangan real positif tercapai ketika $x = a$ dan $y = b$. Nilai dari $a + b + ab$ adalah . . . .

14 Terdapat sebuah segitiga sama sisi ABC. Titik M dan N terletak di BC dan $M \neq N$. Titik D terletak di dalam segitiga ABC sehingga DMN segitiga sama sisi. Garis BD memotong garis AC di E dan garis CD memotong garis AB di F. Jika $MN = 3$, $BF = 4$, dan $CE = 8$, panjang BC adalah . . . .

15 Misalkan $\sigma(n)$ adalah jumlah faktor positif dari n. Jumlah semua bilangan asli $n \leqslant 225$ sehingga $\sigma(n)$ adalah bilangan ganjil adalah . . . .

16 Terdapat dua lingkaran dengan titik pusat O_1 dan O_2 dengan jari-jari 4 dan 8. Dua lingkaran tersebut berpotongan di X dan Y dengan $\angle O_1XO_2 = 90°$. Dibuat garis singgung persekutuan luar yang lebih dekat ke X daripada Y, menyinggung lingkaran O_1 di A dan O_2 di B. Misalkan garis AB memotong garis XY di P. Luas dari segitiga O_1PO_2 adalah . . . .

17 Diberikan segitiga ABC. Titik D pada AB sehingga $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{4}$ dan titik E pada AC sehingga $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{8}$. Misalkan M adalah titik tengah BC dan N adalah titik potong AM dan DE. Jika luas dari segitiga ABC adalah 1210, luas dari segitiga ADN adalah . . . .

18 Misalkan m, n, k, z adalah bilangan asli yang memenuhi $m \geqslant k$, $n \geqslant k+1$, dan

$$16\binom{m}{k} + 3\binom{n}{k+1} = 48z.$$

Untuk nilai terkecil m yang memenuhi, nilai terkecil z yang memenuhi adalah . . . .

19 Terdapat barisan bilangan

$$-\frac{1}{567}, -\frac{1}{566}, \ldots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{566}, \frac{1}{567}.$$

Pada setiap langkah, Adi menghapus 2 bilangan x dan y dan menggantinya dengan $x + y - xy$. Setelah sekian langkah, akan tersisa satu bilangan. Jika bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, nilai dari $a + b$ adalah . . . .

20 Jumlah satu digit sebelah kiri dan kanan koma dari $\left(6 + \sqrt{26}\right)^{18}$ adalah . . . .

Bagian II – Solusi

3. Solusi Kemampuan Dasar

1 Diketahui x, y, dan z merupakan bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$x - y = 1, \quad y - z = 2, \quad xyz = 777.$$

Nilai dari

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

adalah . . . .

Jawab: $\mathbf{\frac{1}{111}}$

Samakan penyebut, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{xyz} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{777}.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $x - z = (x - y) + (y - z) = 3$. Selain itu, diperoleh

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + yz + zx)}{2} \\ &= \frac{(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)}{2} \\ &= \frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2} \\ &= \frac{1 + 4 + 9}{2} \\ &= 7.\end{aligned}$$

Jadi, hasil yang diminta adalah

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{7}{777} = \boxed{\frac{1}{111}}.$$

. . . .

2 Adi, Budi, dan Cici melakukan permainan melempar koin, dengan Adi mendapat giliran pertama, dilanjutkan dengan Budi, lalu Cici. Pemain pertama yang mendapatkan gambar dinyatakan menang. Jika ketiga pemain mendapat angka, permainan diulang dengan urutan yang sama. Jika peluang Adi menang adalah $\frac{a}{n}$, peluang Budi menang adalah $\frac{b}{n}$, dan peluang Cici menang adalah $\frac{c}{n}$, dengan a, b, c, n adalah bilangan asli serta $\text{FPB}(a, b, c, n) = 1$, nilai dari $c + n$ adalah . . . .

Jawab: 8

Pada soal ini, hanya diperlukan menentukan peluang Cici menang. Perhatikan bahwa pada setiap lemparan, peluang munculnya angka dan gambar masing-masing adalah $\frac{1}{2}$. Misalkan A dan G berturut-turut kejadian munculnya angka dan gambar pada lemparan koin oleh seorang pemain. Agar Cici menang, hasil lemparannya adalah

$$AAG, \quad AAA\,AAG, \quad AAA\,AAA\,AAG, \quad \cdots, \quad \underbrace{AAA\,AAA\,\cdots AA}_{3k-1}G, \quad \cdots$$

Dengan kata lain, lemparan gambar pertama harus muncul pada Cici dan sebelumnya harus semuanya angka. Jika ada $3k-1$ lemparan pertama muncul angka, kemudian muncul gambar pada lemparan berikutnya, peluangnya adalah

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{3k-1}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{3k-1}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{3k}}$$

untuk setiap bilangan asli n. Ini berarti peluang Cici menang adalah

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots = \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{7}.$$

Jadi, $(c, n) = (1, 7)$ sehingga $c + n = \boxed{8}$.

. . . .

3 Polinomial $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ habis dibagi $Q(x) = x^2 + \frac{1}{40}$. Nilai dari $\frac{a}{c}$ adalah . . . .

Jawab: 40

Karena $P(x)$ habis dibagi $Q(x)$, ini berarti $P(x) = Q(x)R(x)$ untuk suatu polinomial $R(x)$. Karena $\deg P = 3$ dan $\deg Q = 2$, ini berarti haruslah $\deg R = 1$. Misalkan $R(x) = px + q$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x^2 + \frac{1}{40}\right)(px + q) \\ &= px^3 + qx^2 + \frac{p}{40}x + \frac{q}{40}. \end{aligned}$$

Ini berarti haruslah memenuhi

$$1 = p, \quad a = q, \quad b = \frac{p}{40}, \quad c = \frac{q}{40}.$$

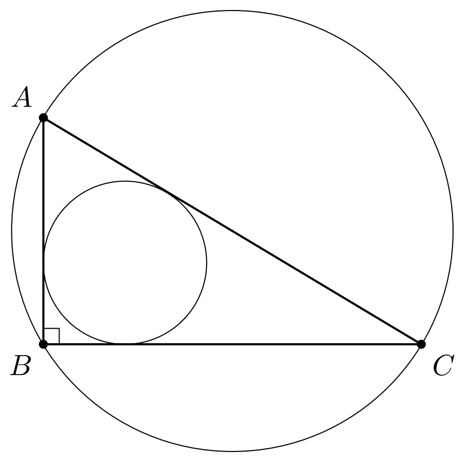
Karena $a = q$, maka $c = \frac{q}{40} = \frac{a}{40}$ sehingga $\frac{a}{c} = \boxed{40}$.

. . . .

4 Diketahui terdapat segitiga siku-siku dengan luas 45 dan jari-jari lingkaran luarnya adalah 8. Jika jari-jari lingkaran dalamnya dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{m}+n$ dengan m dan n adalah bilangan bulat, nilai dari $m+n$ adalah . . . .

Jawab: 101

Misalkan ABC segitiga siku-siku dengan $\angle ABC = 90^\circ$. Akibatnya, $\overline{AC}$ merupakan diameter lingkaran luarnya sehingga $AC = 2 \cdot 8 = 16$.



Misalkan $BC = a$, $CA = b$, dan $AB = c$, ini berarti $b = 16$ dan $45 = [ABC] = \frac{ac}{2}$ sehingga diperoleh $ac = 90$. Selain itu, dari Teorema Pythagoras berlaku $a^2 + c^2 = 16^2 = 256$. Ini berarti berlaku

$$(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 256 + 2(90) = 436 \implies a + c = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}.$$

Dari sini diperoleh setengah keliling segitiga ABC adalah $s = \frac{a+c+b}{2} = \frac{2\sqrt{109}+16}{2} = \sqrt{109}+8$. Jadi, panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah

$$r = \frac{[ABC]}{s} = \frac{45}{\sqrt{109}+8} \cdot \frac{\sqrt{109}-8}{\sqrt{109}-8} = \frac{45\left(\sqrt{109}-8\right)}{\left(\sqrt{109}\right)^2 - 8^2} = \sqrt{109} - 8.$$

Jadi, $(m, n) = (109, -8)$ sehingga $m + n = \boxed{101}$.

. . . .

5 Banyaknya bilangan asli dari 456, 457, 458, $\cdots$, 2026 yang digit-digitnya berbeda dan jika dibaca dari kiri ke kanan, digit-digitnya berada dalam urutan menaik adalah . . . .

Jawab: 76

Akan ditinjau menjadi beberapa kasus.

Kasus 1: Bilangan tiga digit

Misalkan bilangan tersebut abc dan memenuhi $1 \leqslant a < b < c \leqslant 9$. Akan ditinjau saat $456 \leqslant abc \leqslant 499$ terlebih dahulu, ini berarti $a = 4$ sehingga haruslah $4 < b < c \leqslant 9$. Perhatikan bahwa b dan c dua bilangan berbeda yang dipilih dari $5, 6, 7, 8, 9$, yaitu ada sebanyak $\binom{5}{2} = 10$.

Sekarang, akan ditinjau saat $500 \leqslant abc \leqslant 999$, ini berarti $5 \leqslant a < b < c \leqslant 9$. Karena a, b, c merupakan tiga bilangan berbeda yang dipilih dari $5, 6, 7, 8, 9$, maka ada sebanyak $\binom{5}{3} = 10$.

Jadi, dalam kasus ini ada sebanyak $10 + 10 = 20$.

Kasus 2: Bilangan empat digit

Perhatikan bahwa dari 2000 hingga 2026, digit-digitnya tidak memenuhi urutan naik karena ada angka 0 setelah 2. Jadi, cukup ditinjau $abcd$ yang memenuhi $1000 \leqslant abcd \leqslant 1999$ yang memenuhi $a < b < c < d$. Ini berarti $a = 1$ sehingga $1 < b < c < d \leqslant 9$. Perhatikan bahwa b, c, d dipilih dari $2, 3, \cdots, 9$ sehingga ada sebanyak $\binom{8}{3} = 56$.

Dari kedua kasus, total kemungkinannya adalah $20 + 56 = \boxed{76}$.

. . . .

6 Diketahui $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. Untuk setiap bilangan asli $n \geqslant 3$, a_n merupakan sisa pembagian $a_{n-2} + a_{n-1}$ oleh 3. Nilai dari $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2026}$ adalah . . . .

Jawab: 2279

Dengan meninjau beberapa suku pertama, kita akan mendapatkan pola sebagai berikut.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
a_n	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	$\cdots$

Perhatikan bahwa pola berulang setelah suku ke-8, yaitu $a_n = a_{n+8}$ untuk setiap bilangan asli n. Dengan kata lain, $a_{8p+q} = a_q$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p dan bilangan bulat q, dengan $1 \leqslant q \leqslant 8$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_8 &= 9, \\
a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16} &= 9, \\
a_{17} + a_{18} + \cdots + a_{24} &= 9, \\
&\cdots \\
a_{2017} + a_{2018} + \cdots + a_{2024} &= 9.
\end{aligned}$$

Ini berarti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2024} = 9 \cdot \frac{2024}{8} = 9 \cdot 253 = 2277.$$

Selain itu, diperoleh

$$a_{2025} = a_{8\cdot 253+1} = a_1 = 0, \quad a_{2026} = a_{8\cdot 253+2} = a_2 = 2.$$

Ini berarti $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2026} = 2277 + 0 + 2 = \boxed{2279}$.

. . . .

7 Diketahui p, q, r merupakan bilangan prima yang memenuhi

$$p + q + r = 26 \quad \text{dan} \quad pq + qr + rp = 191.$$

Nilai dari pqr adalah . . . .

Jawab: 286

Perhatikan bahwa $p+q+r$ merupkan bilangan genap, ini artinya tepat 1 dari p, q, r yang bernilai 2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $p = 2$. Ini berarti $q + r = 24$ dan $2q + 2r + qr = 181$. Perhatikan bahwa

$$qr = 191 - 2q - 2r = 191 - 2(q + r) = 191 - 2(24) = 143 = 11 \cdot 13.$$

Ini berarti $(q, r) = (11, 13), (13, 11)$ sehingga diperoleh $pqr = 2 \cdot 11 \cdot 13 = \boxed{286}$.

. . . .

8 Diketahui p dan q bilangan prima sehingga $f(x) = x^2 + px + q^2$ memiliki akar-akar bilangan bulat. Nilai dari $p + 2q$ adalah . . . .

Jawab: 9

Misalkan x_1 dan x_2 akar-akar dari $f(x) = 0$. Dari Teorema Vieta, berlaku $x_1 + x_2 = -p$ dan $x_1x_2 = q^2$. Perhatikan bahwa $x_1x_2 = q^2 > 0$ menunjukkan bahwa x_1, x_2 keduanya positif atau keduanya negatif. Karena $x_1+x_2 < 0$, ini berarti x_1, x_2 keduanya harus negatif. Misalkan $x_1 = -y_1$ dan $x_2 = -y_2$, ini berarti $y_1 + y_2 = p$ dan $y_1y_2 = q^2$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $y_1 \leqslant y_2$, ini berarti $(y_1, y_2) = (1, q^2), (q, q)$.

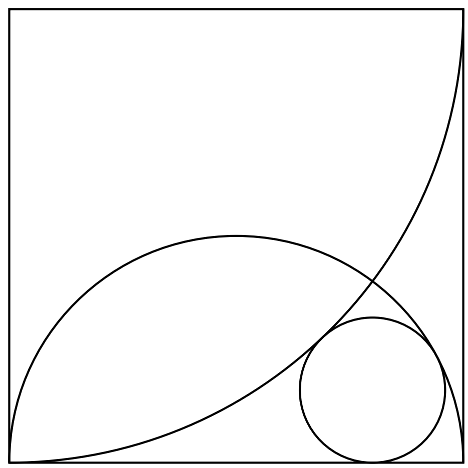
Jika $(y_1, y_2) = (q, q)$, ini berarti $p = y_1 + y_2 = 2q$. Karena $2q$ genap, ini berarti p harus genap sehingga haruslah $p = 2$. Namun, ini memberikan $2 = 2q \implies q = 1$, kontradiksi.

Jika $(y_1, y_2) = (1, q^2)$, ini berarti $p = y_1 + y_2 = 1 + q^2$. Andaikan $q \geqslant 3$, ini berarti $1 + q^2$ merupakan bilangan genap sehingga p juga genap, yaitu $p = 2$. Namun, ini tidak mungkin karena

$p = 1+q^2 > 2$. Ini berarti haruslah $q = 2$ sehingga diperoleh $p = 1+q^2 = 5$. Dapat diperiksa bahwa $f(x) = x^2+5x+4$ memiliki akar-akar -4 dan -1 yang mana memenuhi. Jadi, $p+2q = 5+4 = \boxed{9}$.

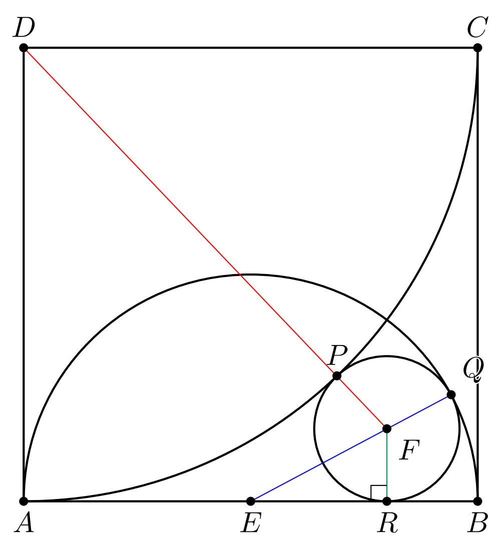
. . . .

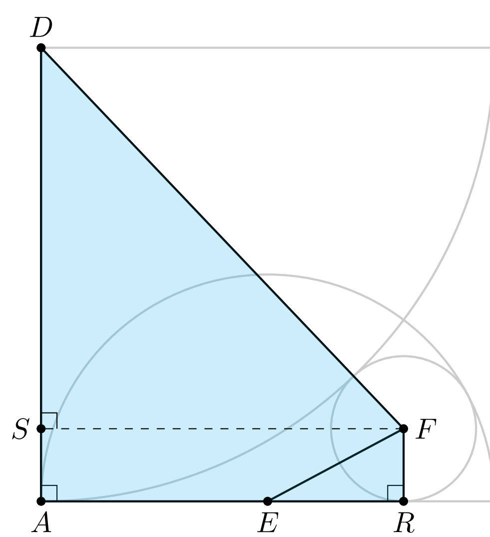
9 Pada gambar di bawah, lingkaran kecil menyinggung seperempat lingkaran di luar, menyinggung setengah lingkaran di dalam, dan menyinggung satu sisi persegi. Jika panjang sisi persegi adalah 300, panjang jari-jari lingkaran kecil tersebut adalah . . . .



Jawab: 48

Perhatikan persegi $ABCD$ berikut, misalkan E dan F berturut-turut titik tengah $\overline{AB}$ dan titik pusat lingkaran yang menyinggung busur AC, busur AB, dan $\overline{AB}$. Lalu, P, Q, R berturut-turut sebagai titik singgung lingkaran berpusat di F dengan busur AC, busur AB, dan $\overline{AB}$. Untuk mempermudah perhitungan, akan dilakukan *rescale* sebesar $\frac{1}{150}$ sehingga panjang sisi persegi adalah $300 \cdot \frac{1}{150} = 2$.





Misalkan panjang jari-jari lingkaran kecil adalah r. Ini berarti

$$AE = 1, \quad DF = DP + PF = 2 + r, \quad EF = EQ - QF = 1 - r, \quad FR = r.$$

Misalkan S pada AD yang memenuhi $FS \perp AD$. Ini berarti $ARFS$ merupakan persegi panjang karena semua sudutnya siku-siku, berarti $AS = FR = r$ sehingga $SD = AD - AS = 2 - r$.

Dari Teorema Pythagoras $\triangle FER$, ini berarti

$$ER = \sqrt{EF^2 - FR^2} = \sqrt{(1-r)^2 - r^2} = \sqrt{1-2r}.$$

Ini berarti berlaku $AR = AE + ER = 1 + \sqrt{1-2r}$. Sekarang, dari Teorema Pythagoras $\triangle DFS$ berlaku

$$FS = \sqrt{FD^2 - DS^2} = \sqrt{(2+r)^2 - (2-r)^2} = \sqrt{8r} = 2\sqrt{2r}.$$

Karena $ARFS$ persegi panjang, ini berarti $AR = SF$ sehingga berlaku $1 + \sqrt{1-2r} = 2\sqrt{2r}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{1-2r} &= 2\sqrt{2r} \\
\sqrt{1-2r} &= 2\sqrt{2r} - 1 && \text{(kuadratkan)} \\
\left(\sqrt{1-2r}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2r} - 1\right)^2 \\
1 - 2r &= 8r + 1 - 4\sqrt{2r} \\
4\sqrt{2r} &= 10r && \text{(kuadratkan)} \\
\left(4\sqrt{2r}\right)^2 &= (10r)^2 \\
16(2r) &= 100r^2
\end{aligned}$$

sehingga berlaku $r = \frac{16 \cdot 2}{100} = \frac{8}{25}$. *Rescale* sebesar 150, ini berarti panjang jari-jari lingkaran kecil adalah $150 \cdot \frac{8}{25} = \boxed{48}$.

. . . .

10 Adi mempunyai koper dengan kunci yang merupakan sebuah barisan 8 angka, dengan setiap angka bernilai 1, 2, 3, 4, atau 5. Ia ingin kunci tersebut memuat tepat satu angka 1 dan empat angka 2. Banyaknya kunci yang dapat dia buat adalah . . .

Jawab: 7560

Solusi 1: Bagi Kasus

Misalkan kunci koper tersebut sebagai $12222abc$ di mana a, b, c bernilai 3, 4, atau 5. Akan dibagi menjadi beberapa kasus.

Kasus 1: a, b, c saling berbeda

Jika a, b, c saling berbeda, ini berarti haruslah $\{a, b, c\} = \{3, 4, 5\}$. Banyaknya cara menyusun 12222345 adalah

$$\frac{8!}{1!4!1!1!1!} = 1680.$$

Kasus 2: Tepat dua dari a, b, c yang bernilai sama

Iini berarti untuk pemilihan abc ada enam kemungkinan: 334, 344, 335, 355, 445, dan 455. Banyaknya cara untuk menyusun $12222aac$ adalah

$$6 \cdot \frac{8!}{1!4!2!1!} = 5040.$$

Kasus 3: Semua a, b, c bernilai sama

Ini berarti ada $\binom{3}{1} = 3$ cara untuk pemilihan digit a, b, c yang mungkin dari $3, 4, 5$. Banyaknya cara menyusun $12222aaa$ adalah

$$3 \cdot \frac{8!}{1!4!3!} = 840.$$

Jadi, jawabannya adalah $1680 + 5040 + 840 = \boxed{7560}$ kunci yang mungkin.

Solusi 2: Aturan Perkalian Langsung

Akan diisi delapan slot angka $*\,*\,*\,*\,*\,*\,**$ untuk kunci. Banyaknya cara pemilihan slot untuk sebuah angka 1 adalah 8 cara, sedangkan untuk pemilihan slot sisanya untuk empat angka 2 adalah $\binom{7}{4} = 35$. Tersisa tiga slot yang akan diisi 3, 4, atau 5. Masing-masing slot memiliki 3 cara, jadi ada $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cara untuk pengisian slot yang tersisa. Jadi, totalnya ada $8 \cdot 35 \cdot 27 = \boxed{7560}$ cara.

4. Solusi Kemampuan Lanjut

11 Misalkan x bilangan rasional terbesar yang kurang dari 100 dan memenuhi persamaan

$$x^2 + \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x^2 \right\rfloor + x + \frac{31}{100}.$$

Jika x dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, nilai dari $a+b$ adalah . . . .

Jawab: 981

Akan digunakan sifat berikut.

Sifat Fungsi Floor

Misalkan x bilangan real dan p bilangan bulat.

(a) $\lfloor x \rfloor = p$ jika dan hanya jika $p \leqslant x < p+1$.

(b) $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Karena ingin dicari x terbesar, akan diasumsikan $x > 0$. Karena x bilangan rasional, misalkan $x = p + \frac{m}{n}$ di mana p, m, n bilangan bulat tak negatif, $n > 0$, $m < n$, dan memenuhi $\text{FPB}(m, n) = 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\left(p+\frac{m}{n}\right)^2 + \left\lfloor p + \frac{m}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \left(p+\frac{m}{n}\right)^2 \right\rfloor + p + \frac{m}{n} + \frac{31}{100} \\
p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} + p &= \left\lfloor p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor + p + \frac{m}{n} + \frac{31}{100} \\
p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} &= \left\lfloor p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor + \frac{m}{n} + \frac{31}{100}.
\end{aligned}$$

Karena p^2 bilangan bulat, ini berarti

$$\begin{aligned}
p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} &= p^2 + \left\lfloor \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor + \frac{m}{n} + \frac{31}{100} \\
\frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n} - \frac{31}{100} &= \left\lfloor \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor \qquad (*)
\end{aligned}$$

Karena ruas kanan $(*)$ bernilai bulat, ini berarti

$$\frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n} - \frac{31}{100} = \frac{200mpn + 100m^2 - 100mn - 31n^2}{100n^2}$$

bilangan bulat. Dengan kata lain, haruslah

$$100n^2 \mid 200mpn + 100m^2 - 100mn - 31n^2.$$

Karena $100 \mid 100n^2$, ini berarti

$$100 \mid 200mpn + 100m^2 - 100mn - 31n^2 \implies 100 \mid 31n^2.$$

Mengingat $\text{FPB}(100, 31) = 1$, akibatnya $100 \mid n^2$ sehingga diperoleh $10 \mid n$. Misalkan $n = 10t$, ini berarti

$$\begin{aligned} &10000t^2 \mid 2000mpt + 100m^2 - 1000mt - 3100t^2 \\ \implies\ &100t^2 \mid 20mpt + m^2 - 10mt - 31t^2. \end{aligned}$$

Karena $t \mid 100t^2$,ini berarti

$$t \mid 20mpt + m^2 - 10mt - 31t^2 \implies t \mid m^2.$$

Mengingat $\text{FPB}(m, n) = 1$, ini berarti $\text{FPB}(m, t) = 1$ sehingga berlaku pula $\text{FPB}\left(m^2, t\right) = 1$. Jadi, $t \mid 1$ sehingga $t = 1$. Dari sini diperoleh $n = 10$ yang berarti $0 \leqslant m \leqslant 9$. Selain itu,

$$100 \mid 20mp + m^2 - 10m - 31.$$

Karena $10 \mid 100$, ini berarti

$$10 \mid 20mp + m^2 - 10m - 31 \implies 10 \mid m^2 - 31.$$

Didapatkan $m^2 \equiv 31 \pmod{10}$ yang berarti $m^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Ini berarti berlaku $m \equiv 1, 9 \pmod{10}$ sehingga diperoleh $m = 1$ atau $m = 9$. Lihat persamaan $(*)$ dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{m}{n} + \frac{31}{100} = \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \left\lfloor \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor = \left\{ \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\}.$$

Ini berarti harus memenuhi

$$0 \leqslant \frac{m}{n} + \frac{31}{100} < 1 \implies -\frac{31}{100} \leqslant \frac{m}{n} < \frac{69}{100}.$$

Karena $n = 10$, ini berarti $-\frac{31}{10} \leqslant m < \frac{69}{10}$ yang berarti $0 \leqslant m \leqslant 6$. Jadi, haruslah $m = 1$. Ini berarti

$$100 \mid 20 \cdot 1 \cdot p + 1^2 - 10 \cdot 1 - 31 = 20p - 40 \implies 5 \mid p - 2.$$

Ini berarti $p = 5k + 2$ untuk suatu bilangan bulat $k \geqslant 0$. Agar $x = (5k + 2) + \frac{1}{10}$ terbesar, ini berarti $k = 19$ sehingga $x = 97 + \frac{1}{10}$.

Jadi, solusi terbesar x yang diinginkan adalah $\frac{a}{b} = \frac{971}{10}$. Ini berarti $a = 971$ dan $b = 10$ sehingga $a + b = \boxed{981}$.

. . . .

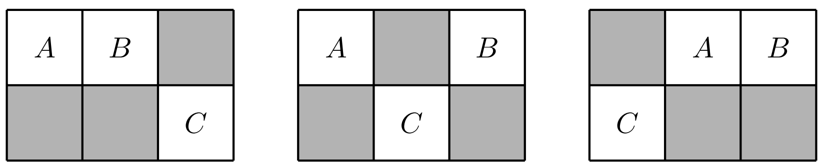
12 Terdapat papan berukuran 2×3 (2 baris dan 3 kolom). Setiap petak diberi warna hitam atau putih. Pada setiap kolom terdapat setidaknya satu petak hitam dan pada setiap baris terdapat setidaknya satu petak putih. Setiap petak putih diberi label berupa salah satu dari bilangan 3, 4, 5, 6, 7, 8 sehingga setiap baris memiliki jumlah bilangan 8. Banyak papan berbeda yang memenuhi adalah . . . .

Jawab: 24

Perhatikan bahwa pada setiap baris hanya terdiri maksimal dua petak putih, karena jika ada tiga petak putih, jumlah bilangan pada baris tersebut akan lebih besar dari atau sama dengan $3 + 3 + 3 = 9$. Akan dibagi menjadi beberapa kasus.

Kasus 1: Tepat Dua Petak Putih di Baris Pertama (atau Kedua)

Jika ada dua petak putih pada baris pertama, maka petak putih pada baris kedua harus berada di kolom yang berbeda dengan dua petak putih sebelumnya (lihat gambar).

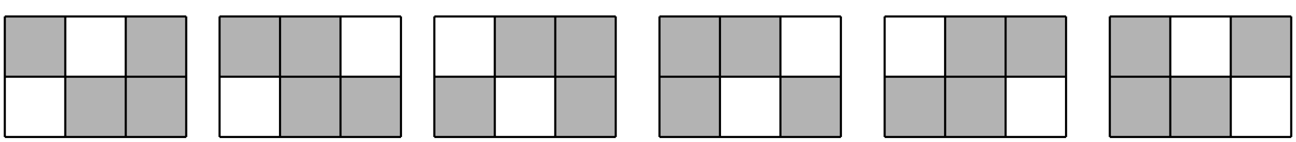


Perhatikan bahwa kemungkinan (A, B) yang dapat diisi adalah $(A, B) = (3, 5), (5, 3), (4, 4)$, sedangkan $C = 8$. Karena ada 3 konfigurasi penempatan petak hitam-putih, ini berarti ada $3 \cdot 3 = 9$ cara pengisian petak. Hal yang serupa apabila dua petak putih berada di baris kedua, juga ada 9 cara.

Jadi, ada $9 + 9 = 18$ cara pada kasus ini.

Kasus 2: Tepat Satu Petak Putih di Baris Pertama dan Kedua

Perhatikan bahwa petak putih pada masing-masing baris harus berada di kolom yang berbeda (lihat gambar).



Masing-masing petak putih harus berisi angka 8, jadi ada 6 cara pada kasus ini.

Total banyaknya cara mengisi papan adalah $6 + 18 = \boxed{24}$ cara.

. . . .

13 Misalkan nilai minimum dari

$$x + 50y + \frac{625}{xy^2}$$

untuk x dan y bilangan real positif tercapai ketika $x = a$ dan $y = b$. Nilai dari $a + b + ab$ adalah . . . .

Jawab: 51

> **Ketaksamaan AM-GM**
>
> Jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bilangan real positif, berlaku
>
> $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$
>
> Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Menggunakan ketaksamaan AM-GM, diperoleh

$$x + 50y + \frac{625}{xy^2} = x + 25y + 25y + \frac{625}{xy^2} \geqslant 4\sqrt[4]{x \cdot 25y \cdot 25y \cdot \frac{625}{xy^2}} = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

Nilai minimum tercapai saat $x = 25y = \frac{625}{xy^2}$. Karena $x = 25y$, ini berarti

$$x = \frac{625}{xy^2} \implies 625 = x^2y^2 = (xy)^2$$

sehingga $xy = 25$. Jadi, $25 = xy = (25y)y = 25y^2$ sehingga $y = 1$ dan diperoleh $x = 25y = 25$. Ini berarti $(a, b) = (25, 1)$ sehingga $a + b + ab = 25 + 1 + 25 \cdot 1 = \boxed{51}$.

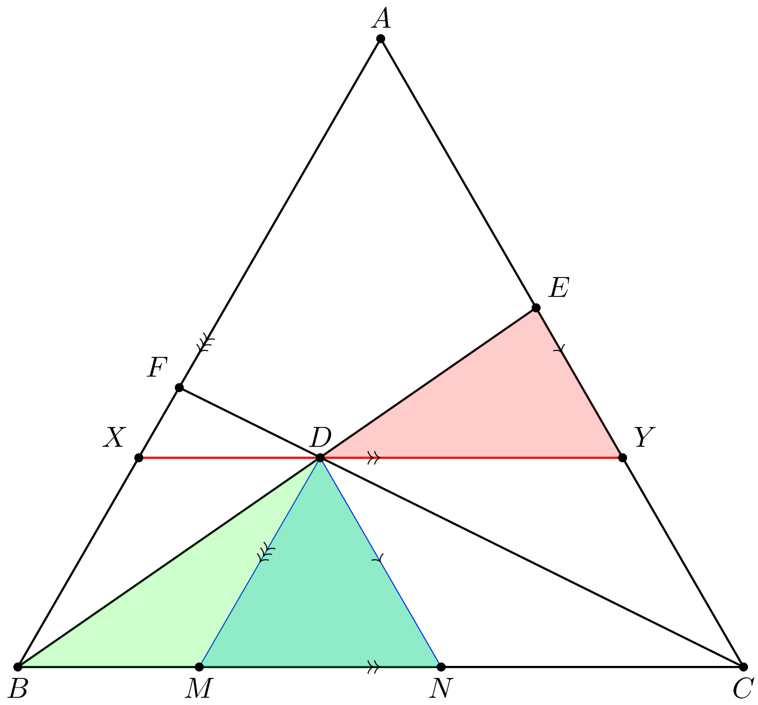
. . . .

14 Terdapat sebuah segitiga sama sisi ABC. Titik M dan N terletak di BC dan $M \neq N$. Titik D terletak di dalam segitiga ABC sehingga DMN segitiga sama sisi. Garis BD memotong garis AC di E dan garis CD memotong garis AB di F. Jika $MN = 3$, $BF = 4$, dan $CE = 8$, panjang BC adalah . . . .

Jawab: 24

Buat garis yang melalui D dan sejajar BC, memotong AB dan AC berturut-turut di X dan Y. Karena DMN dan ABC segitiga sama sisi, masing-masing besar sudutnya adalah 60°. Ini berarti $\angle DMN = 60° = \angle ABC$ yang berarti $\angle DMN = \angle ABC$, berakibat $DM \parallel AB$ menurut sifat garis sejajar. Secara analog, $DN \parallel AC$. Karena $DX \parallel BM$ dan $DM \parallel XB$, ini berarti $DMBX$ merupakan jajar genjang sehingga berlaku $BX = DM = 3$ dan $DX = BM$. Secara analog, $DN = YC = 3$ dan $NC = DY$. Ini berarti

$$FX = FB - BX = 4 - 3 = 1 \quad \text{dan} \quad EY = EC - YC = 8 - 3 = 5.$$



Misalkan $BC = 8x$. Karena $DY \parallel BC$, ini berarti $\angle DYE = \angle BCE$. Selain itu, $\angle DEY = \angle BEC$ sehingga diperoleh $\triangle DEY \sim \triangle BEC$ (AA). Akibatnya,

$$\frac{DY}{BC} = \frac{EY}{EC} \implies DY = \frac{EY}{EC} \cdot BC = \frac{5}{8} \cdot 8x = 5x.$$

Secara analog, $\triangle FXD \sim \triangle FBC$ sehingga diperoleh

$$\frac{DX}{BC} = \frac{FX}{FB} \implies DX = \frac{FX}{FB} \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot 8x = 2x.$$

Ini berarti $XY = DX + DY = 2x + 5x = 7x$. Karena $\angle XYA = \angle BCA = 60°$ dan $\angle YAX = 60°$, ini berarti $\angle AXY = 180° - 60° - 60° = 60°$ sehingga $\triangle AXY$ sama sisi. Jadi, $AY = XY = 7x$ sehingga berlaku $AC = AY + YC = 7x + 3$. Karena $AC = BC$, ini berarti

$$7x + 3 = 8x \implies x = 3 \implies BC = 8x = \boxed{24}.$$

....

15 Misalkan $\sigma(n)$ adalah jumlah faktor positif dari n. Jumlah semua bilangan asli $n \leqslant 225$ sehingga $\sigma(n)$ adalah bilangan ganjil adalah . . . .

Jawab: 2010

Misalkan $n = 2^r m$ di mana r dan m bilangan bulat dengan $k \geqslant 0$ dan $m > 0$ ganjil. Misalkan $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ di mana $p_1, p_2, \cdots, p_k$ bilangan prima ganjil berbeda dan $a_1, a_2, \cdots, a_k$ bilangan bulat tak negatif.

Jumlah Faktor Positif

Misalkan m dan n bilangan asli.

(a) Jika $\text{FPB}(m,n)=1$, berlaku
$$\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n).$$

(b) Jika $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ di mana $p_1,p_2,\cdots,p_k$ bilangan prima berbeda dan $a_1,a_2,\cdots,a_k$ bilangan bulat tak negatif, berlaku
$$\sigma(m)=\prod_{i=1}^{k}\left(p_i^0+p_i^1+\cdots+p_i^{a_i}\right).$$

Karena $n\leqslant 225$, ini berarti $0\leqslant r\leqslant 7$. Karena $\text{FPB}\left(2^r,m\right)=1$, ini berarti
$$\sigma(n)=\sigma\left(2^r m\right)=\sigma\left(2^r\right)\sigma(m)=\left(1+2^1+\cdots+2^r\right)\sigma(m).$$

Diketahui $\sigma(n)$ ganjil. Karena $1+2^1+\cdots+2^r$ selalu ganjil, ini berarti haruslah $\sigma(m)$ ganjil. Sekarang, perhatikan
$$\sigma(m)=\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{a_1}\right)\cdots\left(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{a_k}\right).$$

Agar $\sigma(m)$ ganjil, ini berarti $1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{a_i}$ bernilai ganjil untuk setiap $i=1,2,\cdots,k$. Karena p_i ganjil, ini tercapai saat a_i genap. Dengan kata lain, $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ merupakan bilangan kuadrat sempurna. Ini menunjukkan bahwa $n=2^r t^2$ untuk suatu bilangan **ganjil** t. Dengan kata lain, n harus berbentuk u^2 atau $2u^2$ untuk suatu bilangan **asli** u (sebagai contoh, $2^3\cdot 5^2=2\cdot(2\cdot 5)^2$). Akan digunakan sifat berikut.

Misalkan n bilangan asli, berlaku
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Apabila $n=u^2$, ini berarti $1\leqslant u\leqslant 15$ sehingga jumlahnya adalah
$$1^2+2^2+\cdots+15^2=\frac{15\cdot 16\cdot 31}{6}=1240.$$

Apabila $n=2u^2$, ini berarti $1\leqslant u\leqslant 10$ sehingga jumlahnya adalah
$$2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 10^2=2\left(1^2+2^2+\cdots+10^2\right)=2\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=770.$$

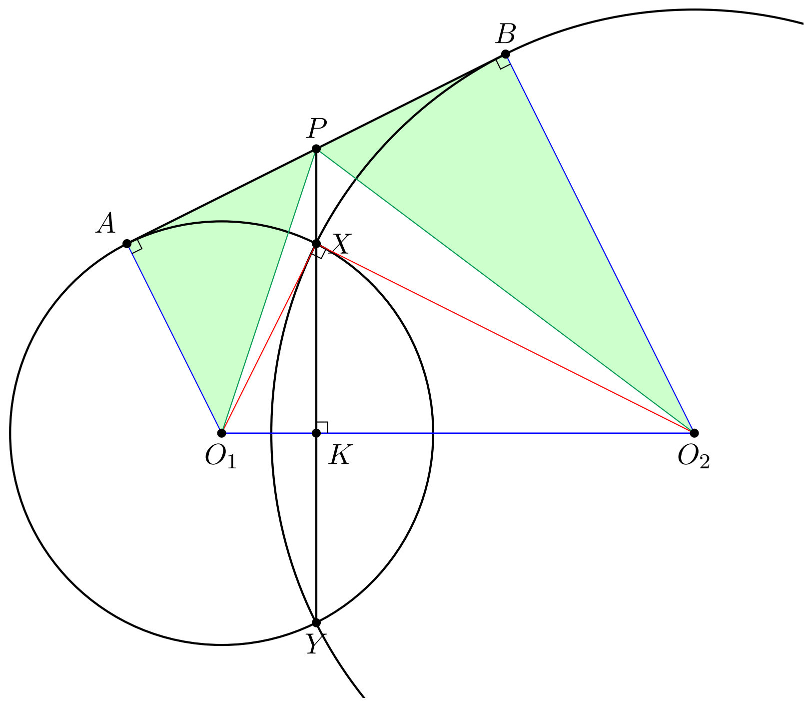
Jadi, jumlah semua bilangan asli n yang memenuhi adalah $1240+770=\boxed{2010}$.

....

16 Terdapat dua lingkaran dengan titik pusat O_1 dan O_2 dengan jari-jari 4 dan 8. Dua lingkaran tersebut berpotongan di X dan Y dengan $\angle O_1XO_2 = 90°$. Dibuat garis singgung persekutuan luar yang lebih dekat ke X daripada Y, menyinggung lingkaran O_1 di A dan O_2 di B. Misalkan garis AB memotong garis XY di P. Luas dari segitiga O_1PO_2 adalah . . . .

Jawab: 24

Misalkan XY memotong O_1O_2 di titik K. Perhatikan bahwa panjang $O_1X = O_1Y$ dan $O_2X = O_2Y$, ini berarti XO_1YO_2 merupakan layang-layang sehingga $XY \perp O_1O_2$ dan $KX = KY$.



Dari Teorema Pythagoras XO_1O_2, diperoleh

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1X^2 + O_2X^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

Perhatikan bahwa $\overline{AB}$ ruas garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran, akan digunakan sifat berikut.

Panjang Ruas Garis Singgung Persekutuan Luar

Jika d jarak kedua pusat lingkaran yang berjari-jari r_1 dan r_2, maka panjang ruas garis singgung persekutuan luarnya adalah

$$\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}.$$

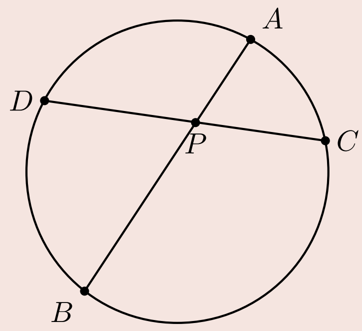
Perhatikan bahwa $d = O_1O_2$, ini berarti

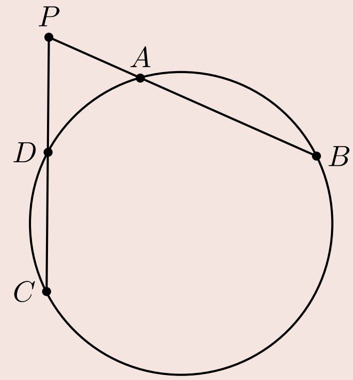
$$AB = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - (4-8)^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Selanjutnya, akan digunakan Power of Point.

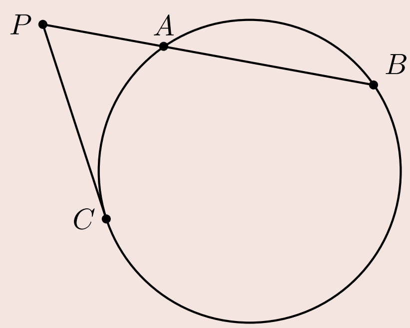
Power of Point

(a) Diberikan empat titik A, B, C, D yang terletak pada satu lingkaran. Jika $AB \cap CD = P$, berlaku $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.





(b) Diberikan tiga titik A, B, C pada sebuah lingkaran dan titik P pada garis BC. Jika $\overline{PC}$ menyinggung (ABC), berlaku $PA \cdot PB = PC^2$.



Karena $\overline{PA}$ menyinggung lingkaran O_1, dari Power of Point (b) berlaku $PA^2 = PX \cdot PY$. Karena $\overline{PB}$ menyinggung lingkaran O_2, dengan cara yang sama berlaku $PB^2 = PX \cdot PY$. Ini berarti

$$PA^2 = PX \cdot PY = PB^2 \implies PA^2 = PB^2 \implies PA = PB = \frac{AB}{2} = 4.$$

Sekarang, perhatikan bahwa

$$[O_1PO_2] = [ABO_2O_1] - [APO_1] - [PBO_2].$$

Luas trapesium siku-siku O_1ABO_2 adalah

$$[ABO_2O_1] = \frac{O_1A + O_2B}{2} \cdot AB = \frac{4+8}{2} \cdot 8 = 48.$$

Selain itu,

$$[APO_1] + [PBO_2] = \frac{AO_1 \cdot AP}{2} + \frac{BP \cdot BO_2}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 8}{2} = 24.$$

Jadi, luas O_1PO_2 adalah $48 - 24 = \boxed{24}$.

. . . .

17 Diberikan segitiga ABC. Titik D pada AB sehingga $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{4}$ dan titik E pada AC sehingga $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{8}$. Misalkan M adalah titik tengah BC dan N adalah titik potong AM dan DE. Jika luas dari segitiga ABC adalah 1210, luas dari segitiga ADN adalah . . . .

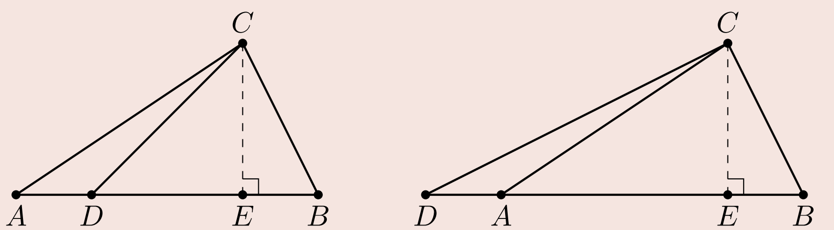
Jawab: 147

Pertama, akan digunakan sifat perbandingan luas berikut.

Sifat Perbandingan Luas

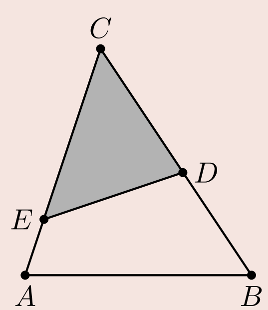
(a) Diberikan segitiga ABC dan titik D terletak pada garis AB. Maka berlaku

$$\frac{[BDC]}{[ABC]} = \frac{BD}{AB}, \quad \frac{[ADC]}{[ABC]} = \frac{AD}{AB}, \quad \frac{[BCD]}{[ACD]} = \frac{BD}{AD}.$$



(b) Diberikan segitiga ABC. Titik D dan E berturut-turut terletak pada garis BC dan garis CA. Maka berlaku

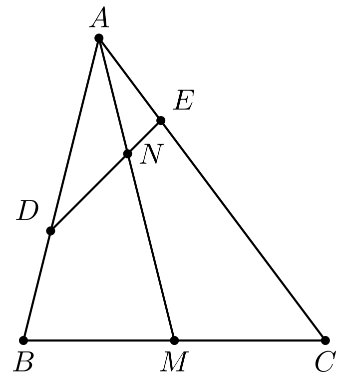
$$\frac{[CDE]}{[ABC]} = \frac{CD}{CB} \cdot \frac{CE}{CA}.$$



Menggunakan perbandingan luas (b), diperoleh

$$\frac{[ADE]}{[ABC]} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{11} = \frac{21}{121} \implies [ADE] = \frac{21}{121}[ABC] = \frac{21}{121} \cdot 1210 = 210.$$

Selanjutnya, akan ditentukan $DN : NE$ yang dapat dilakukan dengan dua cara.



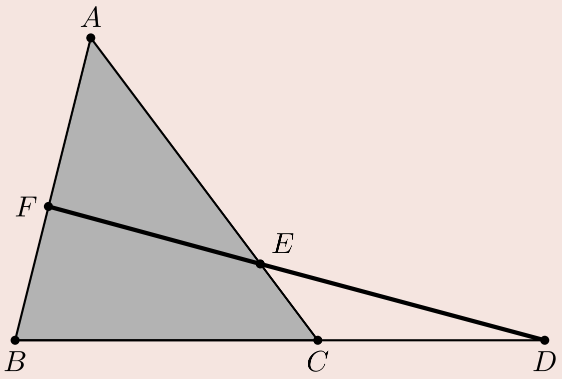
Solusi 1: Teorema Menelaus

Pada solusi ini, akan digunakan teorema berikut.

Teorema Menelaus

Diberikan segitiga ABC. Titik D berada di perpanjangan BC, E berada di sisi CA, dan F berada di sisi AB sedemikian sehingga D, E, F segaris. Maka berlaku

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$



Perpanjang ED hingga memotong garis BC di F. Dari Teorema Menelaus $\triangle ABC$ transversal $\overline{FDE}$ berlaku

$$1 = \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{AE}{EC} = \frac{CF}{FB} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} \implies \frac{CF}{FB} = \frac{14}{3}.$$

Ini berarti $CB : BF = 11 : 3$ dan misalkan $BC = 22x$. Ini berarti $BM = MC = 11x$ dan $FB = 6x$ sehingga $FB : BM : MC = 6 : 11 : 11$. Dari Teorema Menelaus $\triangle FCE$ transversal $\overline{ANM}$ berlaku

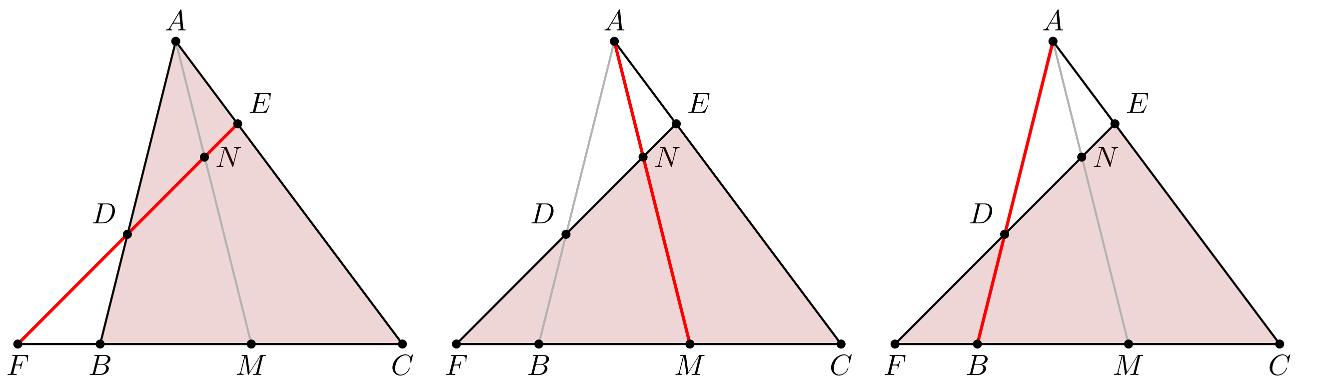
$$1 = \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EN}{NF} \cdot \frac{FM}{MC} = \frac{11}{3} \cdot \frac{EN}{NF} \cdot \frac{17}{11} \implies \frac{EN}{NF} = \frac{3}{17}.$$

Dari Teorema Menelaus $\triangle FEC$ transversal $\overline{ADB}$ berlaku

$$1 = \frac{CA}{AE} \cdot \frac{ED}{DF} \cdot \frac{FB}{BC} = \frac{11}{3} \cdot \frac{ED}{DF} \cdot \frac{6}{22} \implies \frac{ED}{DF} = 1.$$

Misalkan $EF = 20y$. Dari $EN : NF = 3 : 17$ dan $ED : DF = 1 : 1$ berlaku $EN = 3y$, $NF = 17y$, dan $ED = DF = 10y$. Ini menunjukkan bahwa $ND = ED - EN = 10y - 3y = 7y$ sehingga

$$EN : ND = 3y : 7y = 3 : 7.$$



Dari sifat perbandingan luas (a), ini berarti

$$\frac{[ADN]}{[ADE]} = \frac{DN}{DE} = \frac{7}{10} \implies [ADN] = \frac{7}{10}[ADE] = \frac{7}{10} \cdot 210 = \boxed{147}.$$

Solusi 2: Mass Point Method

Nyatakan a sebagai massa di titik A, dituliskan aA dan hal yang serupa untuk titik lainnya. Lakukan *splitting masses* di A, tuliskan $aA = a_1A + a_2A$ dengan:

- D pusat massa sistem $\{a_1A, bB\}$,
- E pusat massa sistem $\{a_2A, cC\}$.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan massa di B adalah 21 (tulis $21B$). Pilih M sebagai pusat massa sistem $\{bB, cC\}$, ini berarti berlaku

$$\frac{b}{c} = \frac{MC}{MB} = 1 \implies c = b = 21$$

dan $m = b + c = 42$. Karena $AD : DB = 7 : 4$ dan D pusat massa sistem $\{a_1A, bB\}$, ini berarti berlaku

$$\frac{a_1}{b} = \frac{DB}{DA} = \frac{4}{7} \implies a_1 = \frac{4}{7}b = \frac{4}{7} \cdot 21 = 12$$

sehingga $d = b + a_1 = 33$. Karena $AE : EC = 3 : 8$ dan E pusat massa sistem $\{a_2A, cC\}$, ini berarti berlaku

$$\frac{a_2}{c} = \frac{EC}{EA} = \frac{8}{3} \implies a_2 = \frac{8}{3}c = \frac{8}{3} \cdot 21 = 56$$

sehingga $e = c + a_2 = 77$. Akan dibuktikan bahwa N pusat massa sistem $\{dD, eE\}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} aA + mM &= (a_1A + a_2A) + (bB + cC) \\ &= (a_1A + bB) + (a_2A + cC) \\ &= dD + eE \end{aligned}$$

sehingga pusat massa sistem $\{aA, mM\}$ dan $\{dD, eE\}$ merupakan titik sama, yaitu titik potong AM dan DE, adalah N. Jadi, N pusat massa sistem $\{dD, eE\}$ sehingga berlaku

$$NE : ND = d : e = 33 : 77 = 3 : 7.$$

Selanjutnya, dapat diterapkan cara yang serupa pada solusi pertama.

. . . .

18 Misalkan m, n, k, z adalah bilangan asli yang memenuhi $m \geqslant k$, $n \geqslant k + 1$, dan

$$16\binom{m}{k} + 3\binom{n}{k+1} = 48z.$$

Untuk nilai terkecil m yang memenuhi, nilai terkecil z yang memenuhi adalah . . . .

Jawab: 32

Perhatikan bahwa $3 \mid 48z$, ini berarti

$$3 \mid 16\binom{m}{k} + 3\binom{n}{k+1} \implies 3 \mid 16\binom{m}{k}.$$

Karena $\text{FPB}(3, 16) = 1$, ini berarti $3 \mid \binom{m}{k}$. Untuk $m \in \{1, 2\}$, perhatikan bahwa

$$\binom{1}{1} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1$$

sehingga tidak mungkin $3 \mid \binom{m}{k}$. Untuk $m = 3$, perhatikan bahwa

$$\binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1$$

sehingga $3 \mid \binom{3}{k}$ terpenuhi untuk $k = 1$ atau $k = 2$.

Kasus 1: $k = 1$

Ini berarti

$$48z = 16\binom{3}{1} + 3\binom{n}{2} = 16 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 48 + \frac{3n(n-1)}{2}$$

sehingga

$$z = \frac{48 + \frac{3n(n-1)}{2}}{48} = 1 + \frac{n(n-1)}{32}.$$

Dari sini haruslah $32 \mid n(n-1)$. Karena $\text{FPB}(n, n-1) = 1$, ini berarti $32 \mid n$ atau $32 \mid n-1$. Agar z sekecil mungkin, ini berarti n sekecil mungkin dan terpenuhi untuk $n = 32$. Jadi, diperoleh $z = 1 + \frac{32 \cdot 31}{32} = 1 + 31 = 32$.

Kasus 2: $k = 2$

Ini berarti

$$48z = 16\binom{3}{2} + 3\binom{n}{3} = 48 + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 48 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

sehingga

$$z = \frac{1}{48}\left[48 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\right] = 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{96}.$$

Ini berarti haruslah $96 \mid n(n-1)(n-2)$. Karena $96 = 32 \cdot 3$, ini berarti haruslah $32 \mid n(n-1)(n-2)$. Jika n ganjil, ini berarti $n-2$ juga ganjil sehingga berlaku $\text{FPB}(n, 32) = \text{FPB}(n-2, 32) = 1$ sehingga haruslah $32 \mid n-1$. Jadi, nilai n terkecil adalah $n = 33$ sehingga didapatkan

$$z = 1 + \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{96} = 341 \quad \text{(lebih besar)}.$$

Jika n genap, ini berarti $n-1$ ganjil sehingga dengan alasan yang sama, berlaku $32 \mid n(n-2)$. Misalkan $n = 2t$ di mana t bilangan asli, ini berarti

$$32 \mid 2t(2t-2) = 4t(t-1) \implies 8 \mid t(t-1).$$

Karena $\text{FPB}(t, t-1) = 1$, ini berarti $8 \mid t$ atau $8 \mid t-1$. Ini berarti nilai t terkecil saat $t = 8$ sehingga n terkecil $n = 16$, berarti

$$z = 1 + \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{96} = 36 \quad \text{(lebih besar)}.$$

Jadi, dengan nilai m terkecil, diperoleh nilai z terkecil adalah $z = \boxed{32}$.

....

19 Terdapat barisan bilangan

$$-\frac{1}{567}, -\frac{1}{566}, \ldots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{566}, \frac{1}{567}.$$

Pada setiap langkah, Adi menghapus 2 bilangan x dan y dan menggantinya dengan $x+y-xy$. Setelah sekian langkah, akan tersisa satu bilangan. Jika bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, nilai dari $a+b$ adalah . . . .

Jawab: 850

Definiskan operator $\star$ sebagai

$$x \star y = x + y - xy = -(xy - x - y) = -[(x-1)(y-1) - 1] = -(x-1)(y-1) + 1.$$

Akan dibuktikan bahwa operator ini bersifat komutatif dan asosiatif.

- Untuk sifat komutatif sudah jelas, yaitu

$$x \star y = -(x-1)(y-1) + 1 = -(y-1)(x-1) + 1 = y \star x.$$

- Untuk sifat asosiatif, yaitu $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= \Big(-(x-1)(y-1)+1\Big) \star z \\
&= -\Big(-(x-1)(y-1)+1-1\Big)(z-1)+1 \\
&= (x-1)(y-1)(z-1)+1, \\
x \star (y \star z) &= x \star \Big(-(y-1)(z-1)+1\Big) \\
&= -(x-1)\Big(-(y-1)(z-1)+1-1)+1 \\
&= (x-1)(y-1)(z-1)+1
\end{aligned}$$

  yang mana memenuhi.

Karena berlaku sifat komutatif dan asosiatif, artinya bagaimanapun urutan penghapusan-mengganti bilangan yang dilakukan oleh Andi akan menghasilkan bilangan yang sama. Jadi, cukup pilih salah satu urutan operasi. Tulis $a_n = \frac{1}{n}$ untuk $n = -567, -566, \cdots, -2, 2, \cdots, 567$, dengan melakukan operasi satu per satu dari kiri ke kanan, diperoleh

$$\begin{aligned}
a_{-567} \star a_{-566} \star \cdots \star a_{567} &= \Big[-(a_{-567}-1)(a_{-566}-1)+1\Big] \star a_{-565} \star a_{-564} \star \cdots \star a_{567} \\
&= \Big[(a_{-567}-1)(a_{-566}-1)(a_{-565}-1)+1\Big] \star a_{-564} \star \cdots \star a_{567}
\end{aligned}$$

$$= \Big[-(a_{-567}-1)(a_{-566}-1)(a_{-565}-1)(a_{-564}-1)+1 \Big] \star \cdots \star a_{567}$$
$$= -(a_{-567}-1)(a_{-566}-1)\cdots(a_{-2}-1)\cdot(a_2-1)\cdots(a_{566}-1)(a_{567}-1)+1.$$

Substitusikan, hasilnya akan diperoleh menjadi

$$-\left(-\frac{568}{567}\right)\left(-\frac{567}{566}\right)\left(-\frac{566}{565}\right)\cdots\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(-\frac{565}{566}\right)\left(-\frac{566}{567}\right)+1.$$

Dengan coret-coret beberapa bilangan di pembilang-penyebut, diperoleh

$$-(-1)^{566}\cdot\frac{568}{2}\cdot(-1)^{566}\cdot\frac{1}{567}+1=-\frac{284}{567}+1=\frac{283}{567}.$$

Jadi, $a = 283$ dan $b = 567$ sehingga $a + b = \boxed{850}$.

. . . .

20 Jumlah satu digit sebelah kiri dan kanan koma dari $\left(6+\sqrt{26}\right)^{18}$ adalah . . . .

Jawab: 11

Misalkan $a = 6+\sqrt{26}$ dan $b = 6-\sqrt{26}$, ini berarti $a+b = 12$ dan $ab = 6^2 - \left(\sqrt{26}\right)^2 = 10$. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan $S_n = a^n + b^n$ di mana $S_1 = 12$. Akan dibuktikan bahwa S_n bilangan bulat untuk setiap bilangan asli n. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= a^{n+2}+b^{n+2} \\ &= (a+b)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right) - ab^{n+1} - a^{n+1}b \\ &= (a+b)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right) - ab\left(a^n+b^n\right) \\ &= 12S_{n+1} - 10S_n \end{aligned}$$

yang berarti $S_{n+2} = 12S_{n+1} - 10S_n$ untuk setiap bilangan asli n. Karena

$$S_2 = a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 12^2 - 2(10) = 144 - 20 = 124$$

bilangan bulat. Akibatnya, secara induktif, diperoleh S_n juga bilangan bulat untuk setiap bilangan asli n. Perhatikan bahwa $0 < 6-\sqrt{26} < 1$ sehingga $0 < \left(6-\sqrt{26}\right)^n < 1$. Menggunakan sifat floor (lihat nomor 1 KL) dan S_n bilangan bulat, berlaku

$$\lfloor a^n \rfloor = \lfloor S_n - b^n \rfloor = S_n + \lfloor -b^n \rfloor = S_n - 1 \implies \left\lfloor a^{18} \right\rfloor = S_{18} - 1.$$

Ambil modulo 10, untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$S_{n+2} = 12S_{n+1} - 10S_n \equiv 2S_{n+1} \pmod{10}.$$

Ini berarti berlaku

$$S_{18} \equiv 2S_{17} \equiv 2^2 S_{16} \equiv \cdots \equiv 2^{16} S_2 \equiv 2^{16} \cdot 124 \equiv 2^{16} \cdot 4 \equiv 2^{18} \pmod{10}.$$

Perhatikan bahwa 2^n dalam modulo 10 berpola $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, \cdots$ setiap 4 suku. Karena 18 dibagi 4 bersisa 2, ini berarti $2^{18} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10}$. Jadi, $\lfloor a^{18} \rfloor \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{10}$ yang menunjukkan satu digit sebelah kiri koma a^{18} adalah 3.

Akan ditentukan satu digit sebelah kanan koma. Nyatakan $\sqrt{26} = \frac{x}{100}$, perhatikan bahwa $x^2 = 260.000$. Karena $509^2 = 259.801$ dan $510^2 = 260.100$ sehingga $509 < x < 510$. Ini berarti $5{,}09 < \sqrt{26} < 5{,}1$ sehingga $0{,}9 < 6 - \sqrt{26} < 0{,}91$. Ini berarti $0{,}9^{18} < \left(6 - \sqrt{26}\right)^{18} < 0{,}91^{18}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
0{,}9^{18} &= 0{,}81^9 = 0{,}81 \cdot 0{,}81^8 = 0{,}81 \cdot 0{,}6561^4 > 0{,}81 \cdot 0{,}65^4 = 0{,}81 \cdot 0{,}4225^2 > 0{,}81 \cdot 0{,}42^2 \\
&= 0{,}81 \cdot 0{,}1764 > 0{,}81 \cdot 0{,}17 = 0{,}1377 \\
0{,}91^{18} &= 0{,}8281^9 < 0{,}83^9 = 0{,}83 \cdot 0{,}83^8 = 0{,}83 \cdot 0{,}6889^4 < 0{,}83 \cdot 0{,}69^4 = 0{,}83 \cdot 0{,}4761^2 \\
&< 0{,}83 \cdot 0{,}48^2 = 0{,}83 \cdot 0{,}2304 < 0{,}83 \cdot 0{,}231 = 0{,}19173 < 0{,}1918
\end{aligned}$$

Ini berarti

$$0{,}1377 < 0{,}9^{18} < b^{18} < 0{,}91^{18} < 0{,}1918 \implies 0{,}1377 < b^{18} < 0{,}1918.$$

Satu angka di belakang koma dari a^{18} sama dengan angka satuan dari $\lfloor 10a^{18} \rfloor$, yaitu

$$\left\lfloor 10a^{18} \right\rfloor = \left\lfloor 10S_{18} - 10b^{18} \right\rfloor = 10S_{18} + \left\lfloor -10b^{18} \right\rfloor.$$

Karena $-1{,}918 < -10b^{18} < -1{,}377$, ini berarti $\lfloor 10a^{18} \rfloor = 10S_{18} - 2$. Karena $S_{18} \equiv 4 \pmod{10}$, ini berarti

$$\left\lfloor 10a^{18} \right\rfloor = 10S_{18} - 2 = \cdots 40 - 2 = \cdots 38$$

sehingga angka tepat di belakang koma adalah 8. Jadi, jumlah yang diminta adalah $3 + 8 = \boxed{11}$.